

* 学术论文 *

模糊控制系统建模中的边缘线性化方法*

李洪兴 王加银 苗志宏

北京师范大学数学系, 北京 100875

摘要 针对模糊控制系统建模中出现的变系数非线性模型提出边缘线性化方法. 其手段是将某些论域上的模糊划分中模糊集的隶属函数从三角波形状改为矩形波形状, 从而使变系数非线性模型转化为变系数线性模型. 为了改善转化后的变系数线性模型在形式上的不完备性(即缺项现象), 给出了线性模型的联合逼近方法. 仿真实验表明, 边缘线性化模型关于原非线性模型具有较高的逼近精度.

关键词 模糊控制 变系数非线性模型 变系数线性模型 边缘线性化 线性模型的联合逼近

文献[1]提出了一种基于模糊推理的关于控制系统中被控对象的建模方法, 即将模糊推理机制施与被控对象, 从而得到描述该被控对象的模糊逻辑系统; 然后根据模糊逻辑系统的插值机理^[2-10]把既得的模糊逻辑系统转变为一类变系数非线性微分方程(组)^[1](微分方程为一阶情况时除外, 即一阶情况时该方程为变系数线性微分方程). 正如文献[1]指出的那样, 这实际上解决了在模糊控制系统中被控对象难于建模的困难问题. 从文献[1]的结果可以看到, 对于推理前件多于两个变量(即双输入)的模糊控制系统, 按文献[1]中方法所得到的数学模型均为具有同样形式的变系数非线性微分方程(组); 这样的方程叫做HX方程^[1]. 这里的“非线性”对于该类方程的求解不会带来多少困难, 事实上采用Matlab5.3极容易求出该类方程的解并绘出在给定初值条件下的解曲线及其相平面曲线(见文献[1]中仿真实验). 然而, 这种“非线性”对该控制系统进行某些定性或定量分析(如稳定性、能控性、能观性、稳态误差, 等等)都带来了一定的困难. 为了解决这一问题, 本文提出“边缘线性化方法”, 旨在近似地把上述HX方程转化为变系数线性微分方程(组).

1 模糊控制系统的输入输出模型

首先, 以二阶系统为例叙述几个必要的概念和记号. 设 $Y = [a_1, b_1]$, $\dot{Y} = [a_2, b_2]$, $\ddot{Y} = [a_3, b_3]$ 分别为 $y(t)$, $\dot{y}(t)$, $\ddot{y}(t)$ 的论域; $\mathcal{A} = \{A_i \mid (1 \leq i \leq p)\}$, $\mathcal{B} = \{B_j \mid (1 \leq j \leq q)\}$, $\mathcal{C} = \{C_{ij} \mid (1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q)\}$ 分别为相应论域上的模糊划分(即基元组)^[1-7], y_i 、 \dot{y}_j 、 \ddot{y}_{ij} 分别为 A_i , B_j , C_{ij} 的峰点^[1-6], 满足条件: $a_1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_p \leq b_1$, $a_2 \leq \dot{y}_1 < \dot{y}_2 < \dots < \dot{y}_q \leq b_2$. 视 \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} 为语言变量, 可形成如下的模糊推理规则库:

$$\text{If } y(t) \text{ is } A_i \text{ and } \dot{y}(t) \text{ is } B_j \text{ then } \ddot{y}(t) \text{ is } C_{ij}, \quad (1)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, q$. 根据文献[2]中的结论, 基于(1)式的模糊逻辑系统表示为一个二元分片插值函数

$$\ddot{y}(t) = F(y(t), \dot{y}(t)) \triangleq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q A_i(y(t)) B_j(\dot{y}(t)) \ddot{y}_{ij}. \quad (2)$$

通常, A_i , B_j , C_{ij} 取为“三角波”型隶属函数

2002-11-15 收稿, 2002-12-31 收修改稿

* 国家自然科学基金(批准号: 60174013)、教育部博士点基金(批准号: 20020027013)以及国家重大基础研究发展规划(批准号: 2002CB312200)资助项目

E-mail: lhxqx@bnu.edu.cn

(见图1与图2):

$$A_i(y(t)) = \begin{cases} \frac{y(t) - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}, & y_{i-1} \leq y(t) \leq y_i, \\ \frac{y(t) - y_{i+1}}{y_i - y_{i+1}}, & y_i \leq y(t) \leq y_{i+1}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (3)$$

$$B_j(\dot{y}(t)) = \begin{cases} \frac{\dot{y}(t) - \dot{y}_{j-1}}{\dot{y}_j - \dot{y}_{j-1}}, & \dot{y}_{j-1} \leq \dot{y}(t) \leq \dot{y}_j, \\ \frac{\dot{y}(t) - \dot{y}_{j+1}}{\dot{y}_j - \dot{y}_{j+1}}, & \dot{y}_j \leq \dot{y}(t) \leq \dot{y}_{j+1}, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases} \quad (4)$$

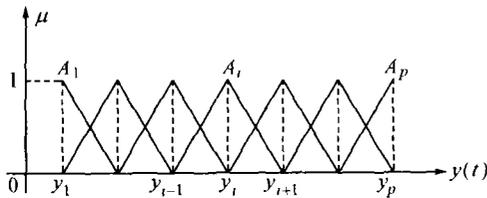


图1 A_i的三角波隶属函数

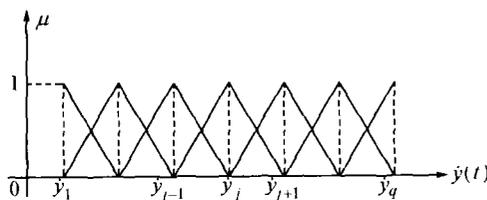


图2 B_j的三角波隶属函数

这里 $i = 1, 2, \dots, p$ 且约定 $y_0 = y_1, y_{p+1} = y_p$; $j = 1, 2, 3, \dots, q$ 且约定 $\dot{y}_0 = \dot{y}_1, \dot{y}_{q+1} = \dot{y}_q$. 注意(2)式仅与 C_{ij} 的峰点有关, 故无需考虑 C_{ij} 的隶属函数形状.

定理 1^[1] 在上述假定下, 基于(1)式的二阶系统的自由运动输入输出模型表示为二阶变系数非线性微分方程

$$\ddot{y}(t) = F(y(t), \dot{y}(t)) \triangleq a(y(t), \dot{y}(t))y(t) + b(y(t), \dot{y}(t))\dot{y}(t) + c(y(t), \dot{y}(t))y(t)\dot{y}(t) + d(y(t), \dot{y}(t)), \quad (5)$$

这里变系数 $a(y(t), \dot{y}(t)), \dots, d(y(t), \dot{y}(t))$ 依赖于时空结构, 满足条件:

$$\begin{aligned} a(y(t), \dot{y}(t)) &\triangleq \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{q-1} a^{(i,j)}, \\ b(y(t), \dot{y}(t)) &\triangleq \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{q-1} b^{(i,j)}, \\ c(y(t), \dot{y}(t)) &\triangleq \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{q-1} c^{(i,j)}, \\ d(y(t), \dot{y}(t)) &\triangleq \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{q-1} d^{(i,j)}, \end{aligned}$$

其中 $a^{(i,j)}, \dots, d^{(i,j)}$ 为 (i, j) 片上的局部系数, 规定为:

当 $(y(t), \dot{y}(t)) \in [y_i, y_{i+1}] \times [\dot{y}_j, \dot{y}_{j+1}]$ 时, $a^{(i,j)} = b^{(i,j)} = c^{(i,j)} = d^{(i,j)} = 0$; 当 $(y(t), \dot{y}(t)) \in [y_i, y_{i+1}] \times [\dot{y}_j, \dot{y}_{j+1}]$ 时, 它们分别定义如下:

$$a^{(i,j)} = \frac{\dot{y}_j(\dot{y}_{ij+1} - \dot{y}_{i+1j+1}) + \dot{y}_{i+1}(\dot{y}_{i+1j} - \dot{y}_j)}{(y_i - y_{i+1})(\dot{y}_j - \dot{y}_{j+1})}, \quad (6)$$

$$b^{(i,j)} = \frac{y_i(\dot{y}_{i+1j} - \dot{y}_{i+1j+1}) + y_{i+1}(\dot{y}_{i+1j} - \dot{y}_j)}{(y_i - y_{i+1})(\dot{y}_j - \dot{y}_{j+1})}, \quad (7)$$

$$c^{(i,j)} = \frac{\dot{y}_{ij} - \dot{y}_{ij+1} - \dot{y}_{i+1j} + \dot{y}_{i+1j+1}}{(y_i - y_{i+1})(\dot{y}_j - \dot{y}_{j+1})}, \quad (8)$$

$$d^{(i,j)} = \frac{y_{i+1}(\dot{y}_{i+1j} - \dot{y}_{ij+1}) + y_i(\dot{y}_{ij+1} - \dot{y}_{i+1j+1})}{(y_i - y_{i+1})(\dot{y}_j - \dot{y}_{j+1})}. \quad (9)$$

注 1 形如(5)式的变系数非线性微分方程称之为(二阶)HX方程. 当 $(y(t), \dot{y}(t)) \in [y_i, y_{i+1}] \times [\dot{y}_j, \dot{y}_{j+1}]$ 时(即位于 (i, j) 片上时), HX方程蜕化为局部HX方程

$$\ddot{y}(t) = a^{(i,j)}y(t) + b^{(i,j)}\dot{y}(t) + c^{(i,j)}y(t)\dot{y}(t) + d^{(i,j)}, \quad (10)$$

它是个常系数非线性微分方程. 这意味着 HX方程是由 $(p-1) \times (q-1)$ 个局部 HX方程拼合而成, 因此要想求解 HX方程, 只需逐片求解局部 HX方程.

注 2 如果在 HX方程(5)中置入外部作用(即系统的输入) $u(t)$, 则该方程成为具有强迫项的(二阶)HX方程

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= F(u(t), y(t), \dot{y}(t)) \\ &\triangleq a(y(t), \dot{y}(t))y(t) + b(y(t), \dot{y}(t))\dot{y}(t) + c(y(t), \dot{y}(t))y(t)\dot{y}(t) + d(y(t), \dot{y}(t)) + gu(t), \end{aligned} \quad (11)$$

其中 g 为常数, 作为系统输入的增益. 相应地局部 HX 方程(10)成为具有强迫项的局部 HX 方程

$$\dot{y}(t) = a^{(i,j)}y(t) + b^{(i,j)}\dot{y}(t) + c^{(i,j)}y(t)\dot{y}(t) + d^{(i,j)} + gu(t). \quad (12)$$

2 输入输出模型的边缘线性化方法

为了回避上述模型中的非线性问题, 这里提一种称之为边缘线性化的方法, 可以近似地把形如(5)式的非线性方程转化为线性方程. 为此, 先把 A_i 的隶属函数从三角波改为“矩形波”(见图3)

$$A_i(y(t)) = \begin{cases} 1, & y_{i-\frac{1}{2}} \leq y(t) < y_{i+\frac{1}{2}}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (13)$$

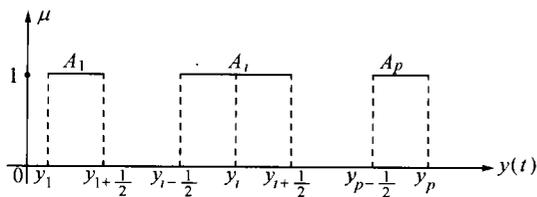


图3 A_i 的矩形波隶属函数

这里 $i = 1, 2, \dots, p$, 且约定: $y_{1-\frac{1}{2}} = y_1, y_{p+\frac{1}{2}} = y_p$.

关于这种改变, 从信号处理的意义上讲, 相当于把一串三角波换为一串矩形波; 从集合的意义上看, 即把模糊集的隶属函数换为清晰集的特征函数; 从插值的角度说, 是把一次(即线性)插值基函数部分地换为零次基函数.

定理2 在原来的假定及(13)式的条件下, 基于(1)式的二阶系统的输入输出模型表示为二阶变系数线性微分方程

$$\dot{y}(t) + P_1(y(t), \dot{y}(t))\dot{y}(t) = Q_1(y(t), \dot{y}(t)). \quad (14)$$

证明 当 $(y(t), \dot{y}(t)) \in [y_{i-\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}] \times [\dot{y}_j, \dot{y}_{j+1}]$ 时, 考虑到 A_i, B_j 的构造, 我们有

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= F(y(t), \dot{y}(t)) \triangleq \\ &\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q A_i(y(t))B_j(\dot{y}(t))\dot{y}_{ij} = \\ &B_j(\dot{y}(t))\dot{y}_{ij} + B_{j+1}(\dot{y}(t))\dot{y}_{i,j+1} = \\ &\frac{\dot{y}(t) - \dot{y}_{j+1}}{\dot{y}_j - \dot{y}_{j+1}}\dot{y}_{ij} + \frac{\dot{y}(t) - \dot{y}_j}{\dot{y}_{j+1} - \dot{y}_j}\dot{y}_{i,j+1} = \end{aligned}$$

$$- \frac{\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_{ij}}{\dot{y}_j - \dot{y}_{j+1}}\dot{y}(t) + \frac{\dot{y}_i\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_{j+1}\dot{y}_{ij}}{\dot{y}_j - \dot{y}_{j+1}}.$$

引入局部系数 $P_1^{(i,j)}$ 和 $Q_1^{(i,j)}$ 如下:

$$P_1^{(i,j)} = \begin{cases} \frac{\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_{ij}}{\dot{y}_j - \dot{y}_{j+1}}, & (y(t), \dot{y}(t)) \in [y_{i-\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}] \times [\dot{y}_j, \dot{y}_{j+1}], \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$Q_1^{(i,j)} = \begin{cases} \frac{\dot{y}_i\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_{j+1}\dot{y}_{ij}}{\dot{y}_j - \dot{y}_{j+1}}, & (y(t), \dot{y}(t)) \in [y_{i-\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}] \times [\dot{y}_j, \dot{y}_{j+1}], \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

于是上式可写为 $\dot{y}(t) = -P_1^{(i,j)}\dot{y}(t) + Q_1^{(i,j)}$, 这意味着, 在局部 (i, j) 片上我们得到常系数线性微分方程

$$\dot{y}(t) + P_1^{(i,j)}\dot{y}(t) = Q_1^{(i,j)}. \quad (15)$$

分别取

$$P_1(y(t), \dot{y}(t)) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q-1} P_1^{(i,j)}, \quad (16)$$

$$Q_1(y(t), \dot{y}(t)) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q-1} Q_1^{(i,j)}, \quad (17)$$

在整体上, $\forall (y(t), \dot{y}(t)) \in Y \times \dot{Y}$, 便有

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= F(y(t), \dot{y}(t)) = \\ &\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q-1} (-P_1^{(i,j)}\dot{y}(t) + Q_1^{(i,j)}) = \\ &- \left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q-1} P_1^{(i,j)} \right) \dot{y}(t) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q-1} Q_1^{(i,j)} = \\ &- P_1(y(t), \dot{y}(t))\dot{y}(t) + Q_1(y(t), \dot{y}(t)), \end{aligned}$$

这就是要证明的(14)式. 证毕.

前面通过把“边缘” Y 上的模糊集从三角波改变为矩形波使得非线性方程(5)转化为线性方程(14). 同理, 亦可改变边缘 \dot{Y} 上的模糊集而得到另外一种形式的线性方程. 为此把 B_j 的隶属函数改为矩形波:

$$B_j(\dot{y}(t)) = \begin{cases} 1, & \dot{y}_{j-\frac{1}{2}} \leq \dot{y}(t) < \dot{y}_{j+\frac{1}{2}}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (18)$$

这里 $j = 1, 2, \dots, q$, 且约定: $\dot{y}_{1-\frac{1}{2}} = \dot{y}_1$, $\dot{y}_{q+\frac{1}{2}} = \dot{y}_q$.

定理3 在原来的假定及(18)式的条件下, 基于(1)式的二阶系统的输入输出模型表示为二阶变系数线性微分方程

$$y(t) + P_2(y(t), \dot{y}(t))y(t) = Q_2(y(t), \dot{y}(t)), \quad (19)$$

这里

$$P_2(y(t), \dot{y}(t)) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^q P_2^{(i,j)}, \quad (20)$$

$$Q_2(y(t), \dot{y}(t)) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^q Q_2^{(i,j)}, \quad (21)$$

其中 $P_2^{(i,j)}$ 与 $Q_2^{(i,j)}$ 为 (i, j) 片中局部系数, 由下式确定:

$$P_2^{(i,j)} = \begin{cases} \frac{\dot{y}_{i+1} - \dot{y}_{ii}}{y_i - y_{i+1}}, & (y(t), \dot{y}(t)) \in [y_i, y_{i+1}] \times [\dot{y}_{j-\frac{1}{2}}, \dot{y}_{j+\frac{1}{2}}], \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$Q_2^{(i,j)} = \begin{cases} \frac{y\dot{y}_{i+1} - y_{i+1}\dot{y}_{ii}}{y_i - y_{i+1}}, & (y(t), \dot{y}(t)) \in [y_i, y_{i+1}] \times [\dot{y}_{j-\frac{1}{2}}, \dot{y}_{j+\frac{1}{2}}], \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

该定理的证明类似定理2的证明过程, 略.

注3 在局部 (i, j) 片上, 方程(19)蜕化为二阶常系数线性微分方程

$$y(t) + P_2^{(i,j)}y(t) = Q_2^{(i,j)}, \quad (22)$$

从而要想处理方程(19), 只须逐片考虑方程(22).

注4 方程(14)与方程(19)相对于标准线性微分方程来讲均有“缺项”, 即前者缺 $y(t)$ 项, 后者缺 $\dot{y}(t)$ 项, 特别对于局部方程(15)和局部方程(22), 这种“缺项”现象容易引起某种错觉; 比如就系统的稳定性而言, 稍不留神就会根据 Routh 稳定判据断定线性系统(15)和线性系统(22)均为不稳定的系统. 然而, 这样的断言一般来讲是不对的. 事实上 Routh 稳定判据是对“全局”线性系统有效的, 而线性系统(15)与线性系统(22)均为“局部”线性系统, 故一般不能直接应用 Routh 稳定判据.

如果把一个局部系统(无论是线性的, 如(15)式及(22)式, 还是非线性的, 如(10)式)视为一个全局系统, 那么根据稳定性的定义不难知道局部系统一般为稳定的系统.

值得注意的是, 全局系统与其诸局部系统关于稳定性不存在明显的必然联系; 比如, 局部系统均稳定的全局系统未必稳定; 另一方面, 存在不稳定局部系统的全局系统可以是稳定的.

3 边缘线性化模型的联合方程

这里所谓的“联合方程”是指采用某种方法把方程(14)与方程(19)合并为一个方程. 这种考虑出于下述两个原因:

(1) 方程(14)与方程(19)分别代表从不同的边缘实施线性化所得到的关于非线性模型(5)的近似线性模型; 这两个模型各有侧重, 含有某种关于 $y(t)$ 与 $\dot{y}(t)$ 的不均衡性. 将这两个模型合并起来可对上述不均衡性起到补偿作用.

(2) 正如注4所述, 方程(14)与方程(19)都有“缺项”; 当推理规则蜕化为一个时, 即 $p = q = 1$, 局部方程将扩展为全局方程. 从而这种“缺项”会带来 Routh 稳定判据的有效性. 由此便导致该系统不稳定的结论.

最容易想到的联合方法是把模型(14)与模型(20)进行均值叠加, 即

$$y(t) + \frac{1}{2}P_1(y(t), \dot{y}(t))\dot{y}(t) + \frac{1}{2}P_2(y(t), \dot{y}(t))y(t) = \frac{1}{2}[Q_1(y(t), \dot{y}(t)) + Q_2(y(t), \dot{y}(t))]. \quad (23)$$

记 $b_1(y(t), \dot{y}(t)) \triangleq \frac{1}{2}P_1(y(t), \dot{y}(t))$, $b_2(y(t), \dot{y}(t)) \triangleq \frac{1}{2}P_2(y(t), \dot{y}(t))$, $b_*(y(t), \dot{y}(t)) \triangleq \frac{1}{2}[Q_1(y(t), \dot{y}(t)) + Q_2(y(t), \dot{y}(t))]$ 则上式写为

$$y(t) + b_1(y(t), \dot{y}(t))\dot{y}(t) + b_2(y(t), \dot{y}(t))y(t) = b_*(y(t), \dot{y}(t)). \quad (24)$$

我们来考察变系数 $b_1(y(t), \dot{y}(t))$, $b_2(y(t), \dot{y}(t))$, $b_*(y(t), \dot{y}(t))$ 的局部表达式. 首先从形

式上假定

$$b_n(y(t), \dot{y}(t)) \triangleq \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q b_n^{(i,j)}, \quad (n = 1, 2, *); \quad (25)$$

其中 $b_n^{(i,j)}$ 为 (i, j) 片上的局部系数. 注意, 这里的 (i, j) 片意指

$$(y(t), \dot{y}(t)) \in [y_{i-\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}] \times [\dot{y}_{j-\frac{1}{2}}, \dot{y}_{j+\frac{1}{2}}].$$

显然方程(24)的局部方程表示为

$$\dot{y}(t) + b_1^{(i,j)} \dot{y}(t) + b_2^{(i,j)} y(t) = b_*^{(i,j)}. \quad (26)$$

由于局部方程(14)与局部方程(19)的局部定义区域不一致, 为了使方程(26)的系数有简洁统一的表达式, 应将方程(26)的局部定义区域 $[y_{i-\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}] \times [\dot{y}_{j-\frac{1}{2}}, \dot{y}_{j+\frac{1}{2}}]$ 再分4部分; 换言之, 把 (i, j) 片剖分为4小片, 分别记之为: $(i, j)_1, (i, j)_2, (i, j)_3, (i, j)_4$

$$(i, j)_1: [y_{i-\frac{1}{2}}, y_i] \times [\dot{y}_{j-\frac{1}{2}}, \dot{y}_j],$$

$$(i, j)_2: [y_{i-\frac{1}{2}}, y_i] \times [\dot{y}_j, \dot{y}_{j+\frac{1}{2}}],$$

$$(i, j)_3: [y_i, y_{i+\frac{1}{2}}] \times [\dot{y}_{j-\frac{1}{2}}, \dot{y}_j],$$

$$(i, j)_4: [y_i, y_{i+\frac{1}{2}}] \times [\dot{y}_j, \dot{y}_{j+\frac{1}{2}}].$$

这样, 局部方程又分裂为4个局部子方程

$$\dot{y}(t) + b_1^{(i,j)_m} \dot{y}(t) + b_2^{(i,j)_m} y(t) = b_*^{(i,j)_m}, \quad (27)$$

其中 $m=1, 2, 3, 4$. 局部系数与局部子系数之间的关系为

$$b_n^{(i,j)} = \sum_{m=1}^4 b_n^{(i,j)_m}, \quad (n = 1, 2, *). \quad (28)$$

经过较繁冗的推导, 局部子系数 $b^{(i,j)_m}$ 的表达式为: 当 $(y(t), \dot{y}(t))$ 不位于“子片” $(i, j)_m$ 上时, $b_n^{(i,j)_m} = 0$ ($n=1, 2, *, m=1, 2, 3, 4$); 当 $(y(t), \dot{y}(t))$ 位于子 $(i, j)_m$ 片时, $b_n^{(i,j)_m}$ 由下列诸式确定:

$$b_1^{(i,j)_1} = b_1^{(i,j)_3} = \frac{1}{2} P_1^{(i,j-1)},$$

$$b_1^{(i,j)_2} = b_1^{(i,j)_4} = \frac{1}{2} P_1^{(i,j)},$$

$$b_2^{(i,j)_3} = b_2^{(i,j)_4} = \frac{1}{2} P_2^{(i,j)},$$

$$b_2^{(i,j)_1} = b_2^{(i,j)_2} = \frac{1}{2} P_2^{(i-1,j)},$$

$$b_*^{(i,j)_1} = \frac{1}{2} (Q_1^{(i,j-1)} + Q_2^{(i-1,j)}),$$

$$b_*^{(i,j)_2} = \frac{1}{2} (Q_1^{(i,j)} + Q_2^{(i-1,j)}),$$

$$b_*^{(i,j)_3} = \frac{1}{2} (Q_1^{(i,j-1)} + Q_2^{(i,j)}),$$

$$b_*^{(i,j)_4} = \frac{1}{2} (Q_1^{(i,j)} + Q_2^{(i,j)}).$$

对于局部 (i, j) 片上的子方程(27), 从系数 $b_1^{(i,j)_m}$ 和 $b_2^{(i,j)_m}$ 的构造可知, 一般情况下它们均非零. 今设 $b_*^{(i,j)_m} \neq 0$, 作变量替换

$$z(t) = y(t) - b_*^{(i,j)_m} / b_2^{(i,j)_m}, \quad (29)$$

于是子方程(27)变为标准的常系数齐次线性微分方程

$$\dot{z}(t) + b_1^{(i,j)_m} \dot{z}(t) + b_2^{(i,j)_m} z(t) = 0. \quad (30)$$

如果置入外部作用 $u(t)$, 那么方程(30)便成为标准的常系数非齐次线性微分方程

$$\dot{z}(t) + b_1^{(i,j)_m} \dot{z}(t) + b_2^{(i,j)_m} z(t) = gu(t), \quad (31)$$

其中 g 为常量, 它作为 $u(t)$ 的增益.

4 输入输出模型边缘线性化的仿真实验

给定一个系统, 设该系统的真实模型为 var der Pol 方程:

$$\dot{y}(t) - \mu(1 - y^2(t))\dot{y}(t) + y(t) = 0, \quad (32)$$

其中置 $\mu=1$. 仿真的目标和具体实施步骤在文献[1]中有详细的介绍. 这里给出3种边缘线性化模型的仿真结果. 设仿真时间 $T=20$, 取定初值 $y(0)=2, \dot{y}(0)=0$.

例1 边缘线性化模型(14)的仿真结果.

情况1 取 $p=7, q=8$, 仿真结果见图4; 可以

看到边缘线性化模型(14)的仿真曲线很接近真实模型曲线.

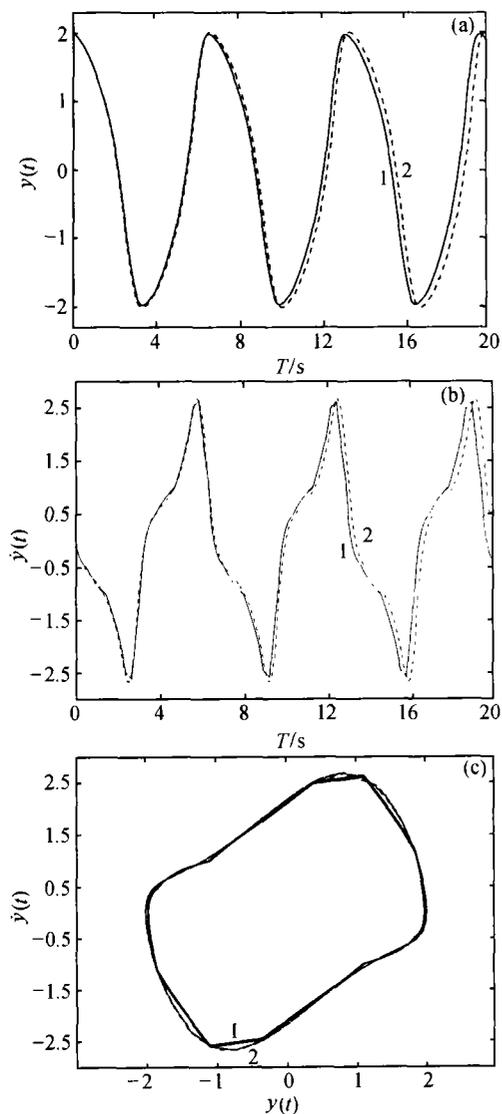


图4 边缘线性化模型(14)在 $p=7, q=8$ 时的仿真曲线
曲线1为线性化模型的仿真曲线, 曲线2为真实模型的仿真曲线. 其中图(a)与(b)分别为关于 y 和 \dot{y} 的仿真情况, (c)是相平面情况

情况2 把 p 与 q 各增加一倍, 即 $p=14, q=16$. 此时, 边缘线性化模型(14)的仿真曲线与真实模型曲线几乎重叠在一起, 仿真图形略去.

例2 边缘线性化模型(19)的仿真结果.

情况1 取 $p=7, q=8$, 仿真结果见图5; 显然, 该线性化模型对真实模型的逼近效果要比模型(14)对真实模型的逼近效果差一些; 原因在于模型(19)中缺 \dot{y} 项.

情况2 把 p 与 q 各增加两倍, 即 $p=21, q=32$

24. 此时, 边缘线性化模型(19)的仿真曲线与真实模型曲线几乎重叠在一起, 仿真图形略去.

例3 联合线性模型(24)的仿真结果.

情况1 取 $p=7, q=8$, 仿真结果见图6.

情况2 为了提高联合模型(24)对真实模型的逼近精度, 分别增加 p 与 q , 比如取 $p=12, q=14$. 此时, 联合模型(24)的仿真曲线与真实模型曲线几乎重叠在一起, 仿真图形略去.

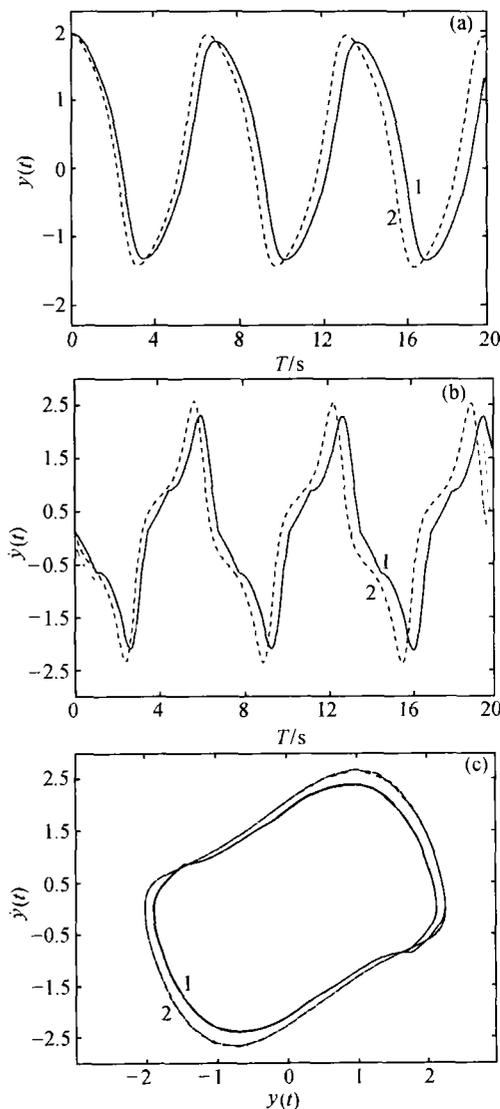


图5 边缘线性化模型(19)在 $p=7, q=8$ 时的仿真曲线

5 结果与讨论

模糊控制适用于具有模糊环境且难于建模的控制场合^[11~14], 在无法用常规方法建立被控对象的数学模型情况下可以直接设计模糊控制器; 通常也能收到较好的应用效果. 众所周知, 成熟的控制理

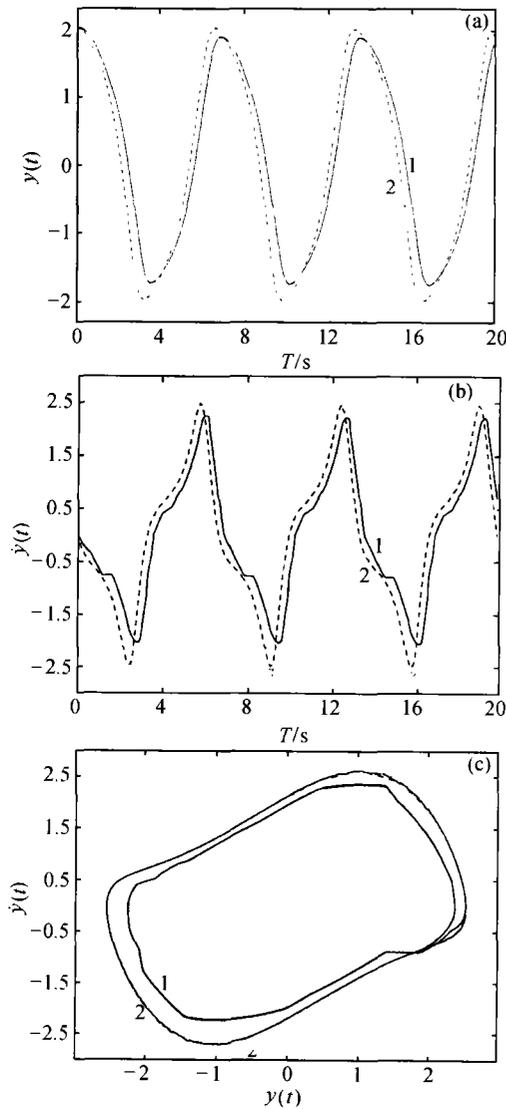


图6 联合线性化模型(24)在 $p=7$, $q=8$ 时的仿真曲线

论事实上是建筑在被控对象的数学模型之上的；因此模糊控制中被控对象难于建模这一致命问题就阻碍了模糊控制理论的进展。文献[1]提出一种基于模糊推理的关于模糊控制系统中被控对象的建模方法，这样便解决了模糊控制系统建模这一困难问题。不过，按文献[1]中方法所得到的数学模型几乎都是变系数非线性微分方程；如何在某种近似的意义下把非线性模型转化为线性模型无疑是一个十分重要的问题。

本文提出的边缘线性化方法可以解决上述问题。该方法的关键手段是将某个论域(亦叫边缘)上的模糊集的隶属函数从三角波形状改为矩形波形状，从而导致该论域上的基础变量(如论域 Y 上的基础变量 $y(t)$ 或论域 \dot{Y} 上的基础变量 $\dot{y}(t)$ ，等等)在原非线性模型中消失，这便达到了线性化的目的。对于 n 阶系统，要从 n 个边缘 $Y, \dot{Y}, \ddot{Y}, \dots, Y^{(n-1)}$ 中任选 $n-1$ 个边缘实施该处置方可得线性化模型。为了在某些场合中避免边缘线性化模型的缺项现象，还提出称之为边缘线性化模型联合方程的概念；仿真实验表明，边缘线性化模型对原非线性模型有较高的逼近效果。

参 考 文 献

- 1 李洪兴, 等. 模糊控制系统的建模. 中国科学, A 辑, 2002, 32(9): 772
- 2 李洪兴. 模糊控制的插值机理. 中国科学, E 辑, 1998, 28(3): 259
- 3 李洪兴. 变论域自适应模糊控制器. 中国科学, E 辑, 1999, 29(1): 32
- 4 李洪兴. 模糊控制器与 PID 调节器的关系. 中国科学, E 辑, 1999, 29(2): 136
- 5 Li H X. Fuzzy logic systems are equivalent to feedforward neural networks. Science in China, Ser E, 2000, 43(1): 42
- 6 李洪兴. 从模糊控制的数学本质看模糊逻辑的成功. 模糊系统与数学, 1995, 9(4): 1
- 7 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法. 中国科学, E 辑, 1999, 29(1): 43
- 8 Li H X, et al. Fuzzy Neural Intelligent Systems. Florida: CRC Press, 2001
- 9 Li H X, et al. Fuzzy Sets and Fuzzy Decision-Making. Florida: CRC Press, 1995
- 10 Koo T J. Stable model reference adaptive fuzzy control of a class of nonlinear systems. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2001, 9(4): 624
- 11 孙增圻. 智能控制理论与技术. 北京: 清华大学出版社, 1997. 16~123
- 12 张乃尧. 典型模糊控制器的结构分析. 模糊系统与数学, 1997, 11(2): 10
- 13 徐 扬, 等. 不确定性推理. 成都: 西南交通大学出版社, 1994
- 14 宋士吉, 等. 模糊推理的反向三 I 算法. 中国科学, E 辑, 2002, 32(2): 230